物　理　学

【第3問】

1辺の長さが a, 質量が m で厚さを無視できる変形しない正三角形の均質な板がある．この板が，長さ l で重さを無視できる3本の伸びない糸 OA，OB，OC を用いて1点Oから水平につるされ静止している（図1）．Oは板の重心Gの真上に位置する．糸 OA を切断した直後の運動を調べたい．対称性を考慮して，O, A および辺 BC の中点 M を含む鉛直面 OAM への投影を用いて考察する．鉛直面 OAM 内に図2のように座標軸 x, y をとり，糸 OC の張力の OM に平行な成分について，糸 OA を切断する直前と直後の値をそれぞれ T_1, T_2 とする．MG，OM の距離をそれぞれ $\overline{\mathrm{MG}}$, $\overline{\mathrm{OM}}$ と表し，重力加速度を g とする．

（1）切断前の幾何学的な配置で決まる条件に関する以下の問いに答えよ．

(1-1) $\overline{\mathrm{MG}}$ を a で表せ．

(1-2) 糸 OA を切断する前に y 軸と OM がなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を l, a を用いて表せ．

(1-3) 糸 OA を切断する前の糸の張力の大きさを m, l, a, g を用いて表せ．

(1-4) T_1 を m, l, a, g を用いて表せ．

（2）糸 OA の切断後，OM が y 軸となす角度 θ は δ だけ変化し，板が水平面となす角度は φ になった．糸 OA 切断後の板の運動に関し，以下の問いに答えよ．ただし，δ および φ の符号は図2の矢印の向きを正とする．

(2-1) 板の重心 G の座標を (x, y) とする．重心運動に関する運動方程式を m, g, T_2, θ, δ, x, y を用いて表せ．

(2-2) 板の重心 G を通り辺 BC に平行な軸のまわりの慣性モーメントを I

とする．板の回転の運動方程式を I，T_2，θ，δ，φ，$\overline{\mathrm{MG}}$を用いて表せ．

（３）糸 OA 切断直後の δ，φ が小さい時について，以下の問いに答えよ．

(3-1) 切断直後の板の重心 G の座標 x，y を θ，δ，φ，$\overline{\mathrm{OM}}$，$\overline{\mathrm{MG}}$を用いて表せ．ただし，切断直後は δ，φ が小さいので 2 次以上の項を無視せよ．

(3-2) 切断直後の運動を考えるので，（２）で求めた運動方程式において$\delta = \varphi = 0$としてよい．また，$I = ma^2/24$である．重心座標 x，y および板の回転角φの時間に関する 2 階微分を運動方程式に代入することにより，T_2 を m，g，θ を用いて表せ．

(3-3) T_1 と T_2 の比を l と a を用いて表せ．

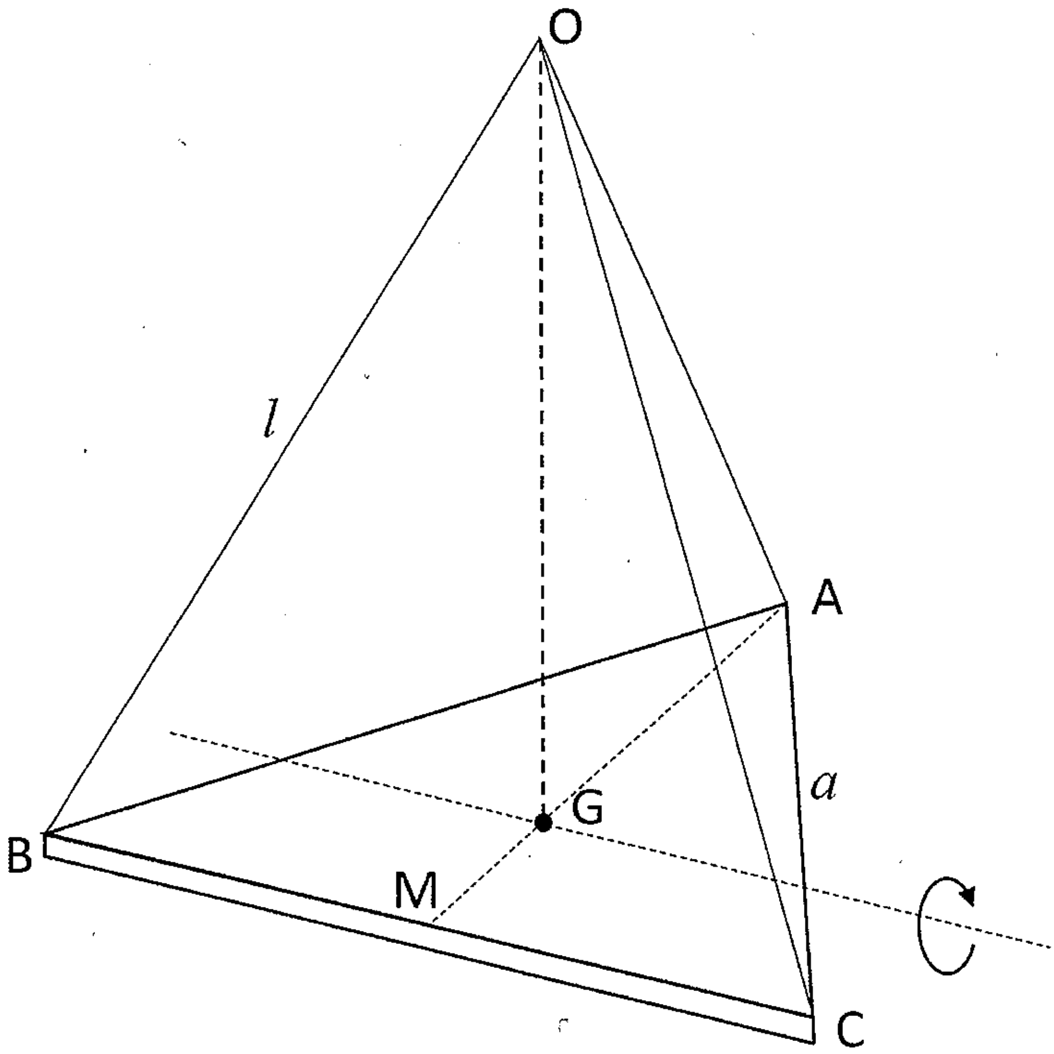

図 1

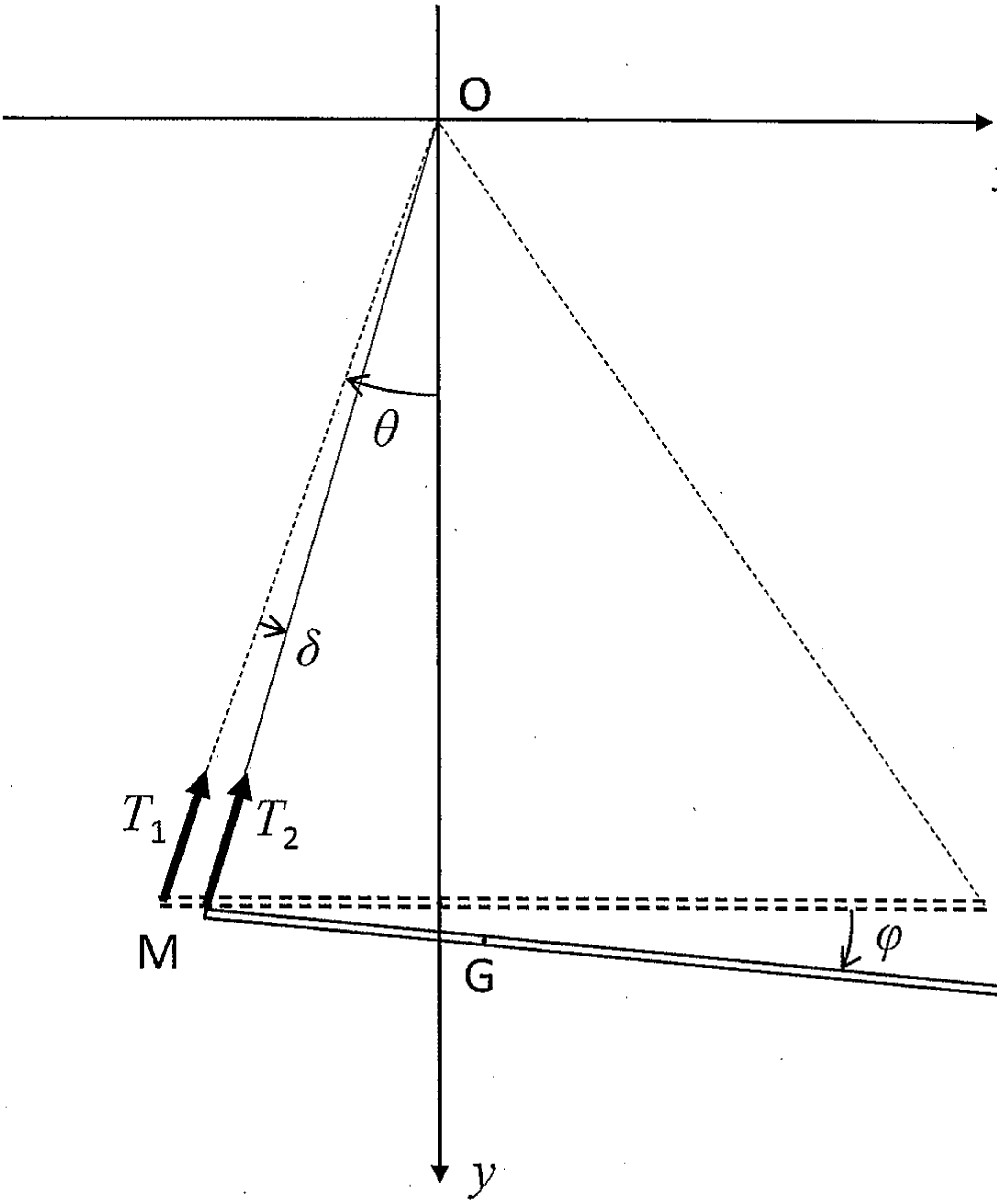

図2

物　理　学

【第４問】

（１）　図１のように，定常で一様な磁場中の，長さlの電気抵抗が無視できる１次元的な導体棒を考える．ただし導体棒の一方の端点Pを接地し，電位を0に固定した．ここで棒の長さ方向をx方向にとり，磁場はz成分のみを持つとする．この一様磁場が$\boldsymbol{B} = B_1\,\boldsymbol{e}_z$と表されるとして，以下の問いに答えよ．ただし$\boldsymbol{e}_z$は$z$方向の単位ベクトルを表す．

(1-1) 導体棒を，向きを保ったまま一定の速さVでyの正方向に運動させる．このとき導体棒内部の電場が 0 であったと仮定し，導体中に存在する自由電子に働く力のx成分を求めよ．ただし自由電子は導体棒と同じ速度で動いていると仮定し，素電荷をeとする．

(1-2) 前問で求めた力によって自由電子はx方向に運動し，導体表面（PおよびQ）に電荷分布が誘起される．この電荷分布によって導体中に電場が発生し，平衡状態では電子に働く力が 0 になると考えられる．このときの導体棒の端点Qにおける電位ϕ_1を符号も含めて求めよ．

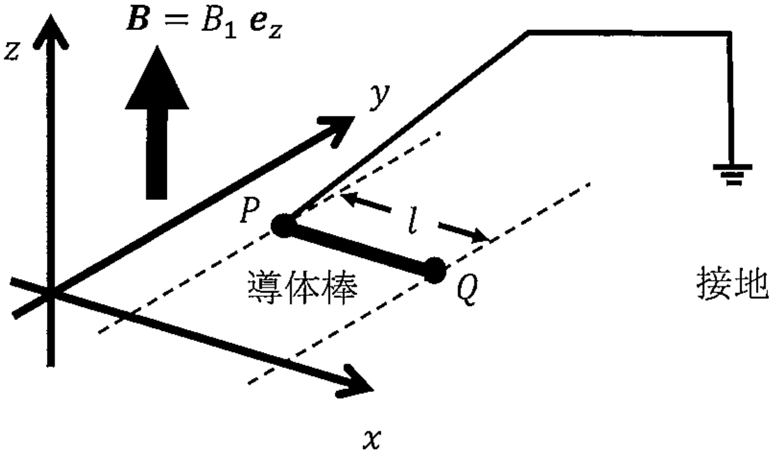

図１

（2）　図２のように，磁場中に半径aの電気抵抗の無視できる導体円盤を設置する．ただし導体円盤は軸対称であり，対称軸のまわりに摩擦の影響なく剛体回転ができるものとし，その回転角速度をΩ_2とする．ここでΩ_2の符号は図２に示す向きを正にとる．また導体円盤の中心Oを接地し，電位を０に固定した．以下では図２のように，導体円盤の回転軸からの距離をr，回転方向の角度をθ，回転軸をz方向にとった円柱座標系を用いる．このとき磁場がz成分のみを持ち，$\boldsymbol{B} = B_2\,\boldsymbol{e}_z$のように表されるとして，以下の問いに答えよ．

(2-1) 磁場B_2を一定に保ち，導体円盤をz軸のまわりに一定の角速度$\Omega_2 = \Omega_0$で剛体回転させた．このとき，導体円盤中に発生する電場ベクトルのr成分（E_r）およびθ成分（E_θ）をそれぞれ求めよ．

(2-2) 前問の条件を満たすとき，導体円盤の外縁部における電位ϕ_2を符号も含めて求めよ．

(2-3) 導体円盤が静止した状態で，磁場のz成分を$B_2 = B_0\cos(m\,\theta - \omega t)$のように変化させたところ，導体円盤は剛体回転を始め，やがて角速度Ω_2が一定の値Ω_0となった．このとき，ファラデーの法則のz成分

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,E_\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial \theta}$$

を用いて，m，ω，Ω_0の間に成立する関係式を求めよ．ただしtは時間，mは整数の定数，ωは実数の定数である．

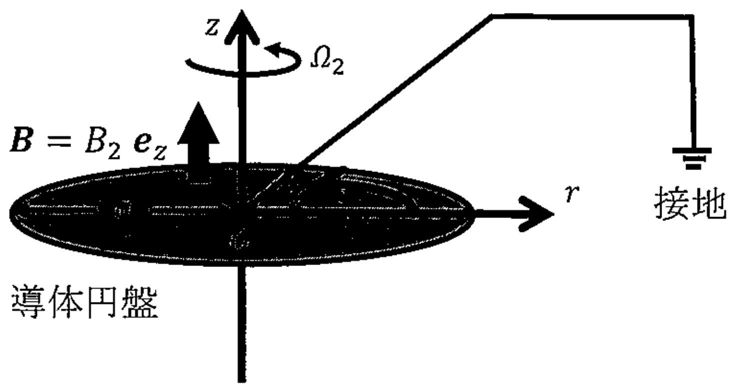

図２

（３） 図２の装置に加えて，図３のようにz軸について軸対称な円環状の導体を設置した．この導体円環の内縁部および外縁部の半径をそれぞれb，cとする．導体円盤と同様に導体円環はz軸のまわりに摩擦の影響なく剛体回転ができるものとし，その回転角速度をΩ_3とする．Ω_3の符号はΩ_2と同様に，図３に示す向きを正にとる．ここで導体円環には磁場$\boldsymbol{B} = B_3\,\boldsymbol{e}_z$を印加した．ただし導体円環は$z$軸からは十分離れており（$a \ll b < c$），導体円盤と導体円環にかかる磁場はお互いに影響を及ぼさないと仮定する．以下ではB_2を正，B_3を負の一定の値に，また導体円盤の回転角速度を一定の値$\Omega_2 = \Omega_0$にそれぞれ保つ．導体円環が静止した状態から時刻$t = 0$に導体円盤と導体円環を導線で接続したところ，導体円環は導体円盤と同じ向きに回転を始めた．このとき以下の問いに答えよ．

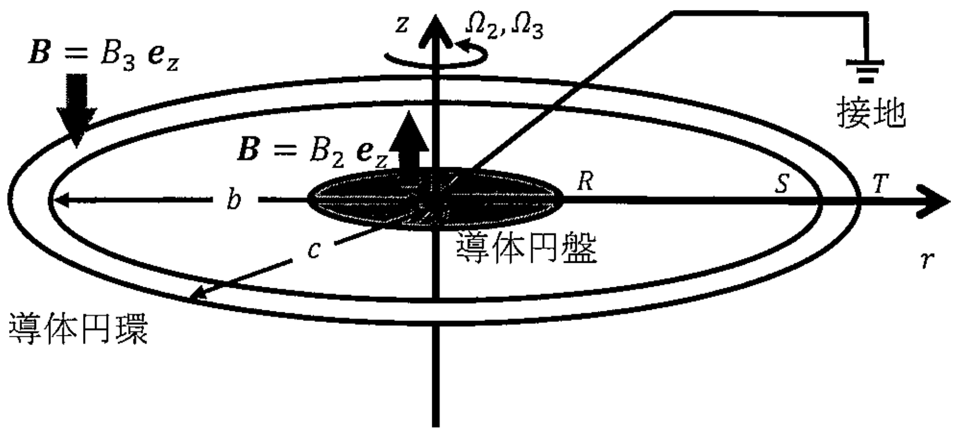

図３

(3-1) このときの導体円盤と導体円環の接続の仕方として，正しいものを以下の（ア）～（カ）から１つ選び，その理由を簡潔に述べよ．ただし図３のように，Rは導体円盤の外縁部，S，Tは導体円環の内縁部および外縁部をそれぞれ表す．ここで電位はθには依存しないと仮定してよい．

(ア) Sを接地し，RとTを接続する．

(イ) Tを接地し，RとSを接続する．

(ウ) RとTを接続する．

(エ) RとSを接続する．

(オ) Tを接地する．

(カ) Sを接地する．

（3-2）十分時間が経過した後の導体円環の回転角速度Ω_3が，導体円盤の回転角速度Ω_0と等しくなるための条件をa，b，c，B_2，B_3を用いて表わせ.

（3-3）問（3-2）の条件を満たすとき，導体円環が一様な質量密度ρおよび電気伝導度σを持つと仮定し，導線を接続した後の導体円環の角速度Ω_3を時間tの関数として求めよ．ここで導体円環に流れるr方向の電流密度j_rが

$$j_r = \sigma \, (E_r + r \, \Omega_3 \, B_3)$$

と表されることを用いてよい.

物 理 学 ／ 化 学

【第５問】

熱容量と相転移に関する以下の設問に答えよ．なお，X を一定に保ったもとでの Y の Z 偏微分を $\left(\dfrac{\partial Y}{\partial Z}\right)_X$ と表す．

閉じた系の準静的過程において，内部エネルギー U およびエンタルピー H の微小変化は，それぞれ

$$dU = d'Q - PdV$$

$$dH = d'Q + VdP$$

と表される．ここで $d'Q$ は系に与えられる熱量，P は圧力，V は体積である．また，d はその微小変化が完全微分であることを，d' は不完全微分であることを表す．温度を T とするとき，系の熱容量 C は系に与えられる熱量の温度微分

$$C = \frac{d'Q}{dT}$$

で定義される．等積過程における熱容量（定積熱容量）を C_V，等圧過程における熱容量（定圧熱容量）を C_P と表す．

（１） C_V および C_P をそれぞれ U または H の微分で表せ．

（２）準静的過程では C_P がエントロピー S を用いて

$$C_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$$

と表されることを示せ．

（３） C_V と C_P の間に関係式

$$C_P - C_V = \left[P + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \qquad \text{(A)}$$

が成り立つことを，以下の手順に従って示せ．

(3-1) U を T と V の関数とみなして，U の全微分 dU を dT と dV を用いて表せ．

(3-2) (3-1) の結果に基づいて $d'Q$ を dT と dV を用いて表すことにより，(A) を導け．

(4) 理想気体の内部エネルギーは体積によらない．このことを用いて理想気体では $C_P - C_V = nR$ であることを示せ．ここで R はモル気体定数，n は気体のモル数を表す．

(5) k 次相転移とは，ギブス自由エネルギー $G = H - TS$ の温度または圧力に関する k 階微分が不連続になるものをいう．

(5-1) 純物質の液相から気相への相転移は 1 次相転移であり，圧力が一定の場合，ふたつの相が共存する平衡温度 T_e では可逆的に生じる．純物質 1 モルの可逆的な相転移において吸収される熱（モル相転移熱）を L とするとき，これに伴う 1 モルあたりのエントロピー変化 Δs を L と T_e を用いて表せ．

(5-2) 液相と気相が共存する平衡系では，平衡の条件として T と P の間にクラペイロン－クラウジウスの関係式

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T\Delta v}$$

が成り立つ．ここで Δv は 1 モルあたりの液相と気相の体積差である．L が一定，気相が理想気体，気相に比べて液相の体積が十分に小さいとみなすことができるとき，液相と気相が共存する平衡状態における P を T の関数として表せ．ただし，$T = T_0$ のとき $P = P_0$ とする．

(5-3) 2 次相転移では定圧熱容量の温度に対する変化が不連続であることを示せ．