数　学

【第１問】

以下の問いに答えよ．途中経過も含めて解答すること．

（１）　以下で定められる数列において，第n項 a_n をnを用いた式で表せ．

$$a_1 = 2,\ a_2 = 7,\ a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

（２）　A 君は，4 つの選択肢から 1 つの正解を選ぶ形式の問題 5 題からなる試験を受ける．この試験は，3 題以上正解すると合格となる．A 君がすべての問題においてでたらめに解答を選んだ時，合格する確率を求めよ．

（３）　次の対称行列Aに関して以下の問いに答えよ．

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(3-1) Aの固有値および固有ベクトルを求めよ．

(3-2) 正規直交行列Uおよび対角行列Λを用いて，$\mathrm{A} = \mathrm{U}\Lambda\mathrm{U}^{\mathrm{T}}$の形で表現できる．UとΛを求めよ．ただし，$\mathrm{U}^{\mathrm{T}}$は行列Uの転置行列を表す．

（４）　次の定積分を求めよ．

(4-1) $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3x^2-2xy-3y^2}\, dx\, dy$$

(4-2) $$\int_{1}^{e^{\frac{\pi}{2}}} \sin(\log x)\, dx$$

数　学

【第２問】

図１で示すように，１辺の長さが n（n は２以上の整数）の立方体 ABCD-EFGH の内部に，直径１の小球を次のような２通りの方法で詰める．

[S]　１層目に，隣接する小球の中心が正方形を作るように格子状に詰め，その上のすべての層に，その下の層に接し上から見て１層目と同じ位置に小球を詰める（図２）．

[F]　１層目に[S]と同じように小球を詰め，２層目には，１層目に接し隣接する４つの小球の中心から等距離の位置に小球を詰める．その上には，奇数番目の層では上から見て１層目のすべての小球と同じ位置に，偶数番目の層では上から見て２層目のすべての小球と同じ位置に，上下方向に互いに接するように互い違いに小球を詰めていく（図３）．

[S]の方法で詰めた時に立方体に入る小球の個数を N_S，[F]の方法で詰めたときに入る小球の個数を N_F とする．また，[F]の方法で詰められた小球の層の数が m であるとして，以下の問いに答えよ．途中経過も含めて解答すること．

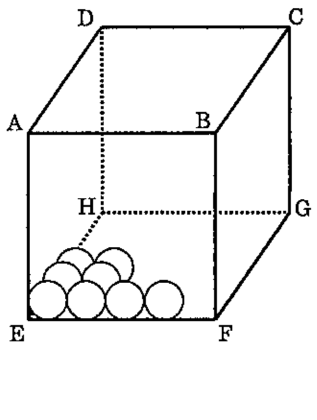

図１

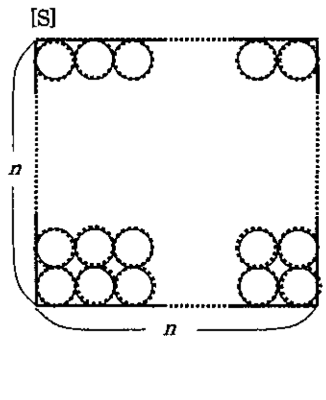

図２

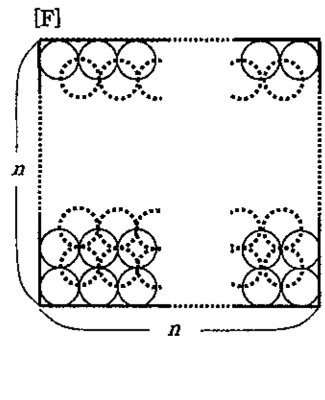

図３

（1） 1辺の長さが1の正方形を底辺とし，4つの正三角形の側面を持つ四角錐の高さを求めよ．

（2） $m=\left\lfloor \sqrt{2}(n-1)+1 \right\rfloor$ となることを示せ．ただし，$\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す．

（3） $n \geq 6$ のとき，$m \geq n+2$ であることを示せ．

（4） $N_F \geq \dfrac{m\left\{n^2+(n-1)^2\right\}}{2}$ となることを示せ．

（5） $N_S > N_F$ となる n をすべて求めよ．

（6） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{m}{n}$ および $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{N_F}{N_S}$ を求めよ．