# 数　学

【第１問】

以下の問いに答えよ．途中経過も含めて解答すること．

（１）　$\sinh^{-1}x = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ を示せ．ただし，$x$ は実数，$\log$ は自然対数とする．

（２）　以下の $z$ に関する方程式の解を全て求め，$a+bi$ の形式で表せ．ただし，$a, b$ は実数で，$i$ は虚数単位である．

(2-1)　$z^3+1=0$

(2-2)　$(1+i)z^3+\sqrt{2}=0$

（３）　以下の実対称行列に関する問いに答えよ．

(3-1) 定理『実対称行列の固有値は実数である』を２次対称行列の場合について証明せよ．

(3-2) 以下の３次対称行列 $\mathbf{A}$ の固有値を全て求め，正規直交系を構成する固有ベクトルの組を１つ求めよ．

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

# 数　学

【第２問】

直径１の円Ａと円Ｂがあり，図１のように$\overline{PQ}$と$\overline{P'Q'}$を両円の直径とする．両円の中心が$r$だけ離れて並んでいるときに，円Ａと円Ｂの重なっている部分の面積を$S(r)$とする．これに関して以下の問いに答えよ．途中経過も含めて解答すること．

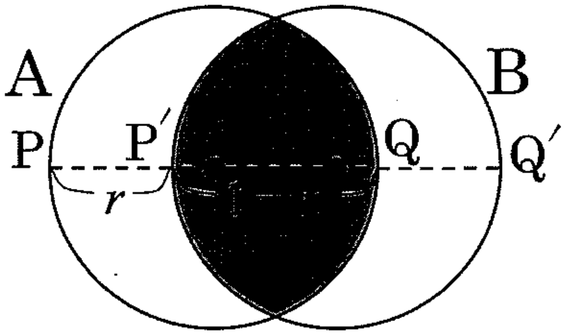


図１

（１）　$S(0)$，$S\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$S\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$S(1)$の値を求めよ．

（２）　$\dfrac{dS(r)}{dr}$を求めよ．$0<r<1$の範囲で考えてよい．

（３）　円Ａの面積のうち円Ｂと重なっている部分の面積が占める割合$\dfrac{4}{\pi}S(r)$と円Ａの直径$\overline{PQ}$のうち円Ｂと重なっている部分の長さ$\overline{P'Q}$の占める割合$1-r$の大小を比較せよ．$0\leq r\leq 1$の範囲で考えてよい．

（4） 図2のように円Aの中心を$(x,y)$平面上の原点に固定して，円Bを次のように動かす試行を多数回くりかえす．

「初期に，円Bの中心は$(x_{\mathrm{start}},y)$にある．ここで$y$は$0 \le y \le 1$の範囲で一様な分布を持つ確率変数である．この出発点から$x$軸に平行に$(x_{\mathrm{end}},y)$まで移動する．」

$x_{\mathrm{start}} \gg 1$, $x_{\mathrm{end}} \ll -1$とし，初期位置と最終位置では円Aと円Bは重なっていない．各試行の中でとる$r$の最小値を$r_{\min}$とし，$S(r)$の最大値を$S_{\max}$とする．$r_{\min}$と$S_{\max}$のそれぞれの期待値を求めよ．

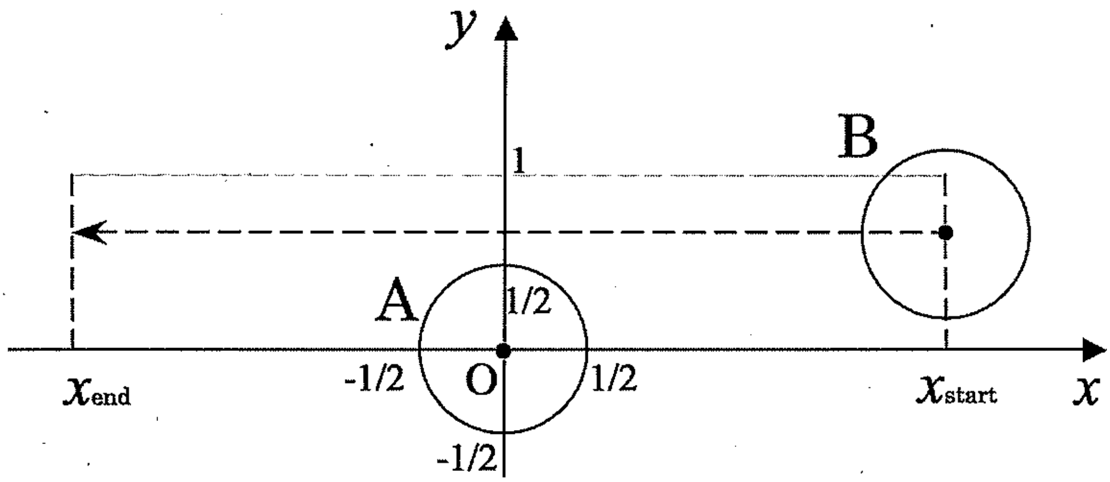


図2