物　理　学

【第３問】

図１のように，おもりの重心に棒を取り付け（以下，振り子と呼ぶ），筐体（きょうたい）に入れ，２次元振動台の上に固定した．運動を記述するため，振り子と筐体の接点を原点 O とし，鉛直下向き方向に z 軸，振動台を水平振動させる方向に x 軸，x 軸に直交する水平方向に y 軸を，右手系をなすように定義する．台面を水平に保ったまま，x 方向および z 方向に振動台を振動させたときの振り子の運動を考える．時刻 t における，振動台の基準位置からの x 方向および z 方向の変位をそれぞれ $u_x(t)$ および $u_z(t)$，z 軸と棒のなす角度を $\theta(t)$（ただし，y 軸の正の方向から見て反時計回り方向を正とする）と表す．重力加速度 $g(>0)$ は系全体で一様であり，筐体や振り子はそれぞれ１つの剛体とみなせるものとする．また，おもりは密度一様の質量 m，半径 a の球であり，棒は太さや質量がゼロとみなせ，長さは ℓ であるとする．さらに，おもりの重心は常に xz 面内にあり，$\theta(t)$ は $\sin\theta \doteqdot \theta$，$\cos\theta = 1$ と近似してよい程度に小さいものとする．空気の影響や摩擦の効果は無視できるとして，以下の問いに答えよ．途中経過も含めて解答すること．

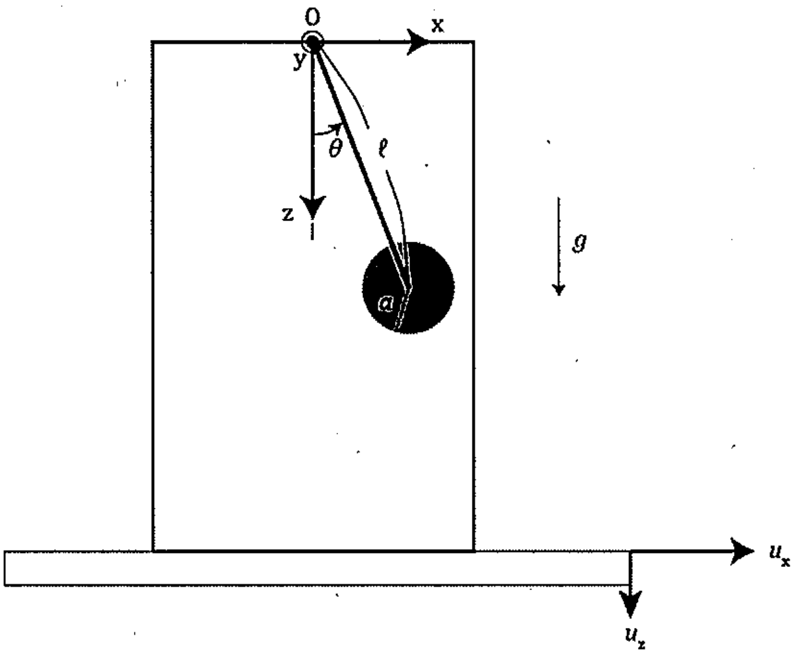


図１

（1）振り子の慣性モーメントを見積もる．

(1-1) おもりの重心を通る軸のまわりの慣性モーメント I_0 は

$$I_0 = \frac{2}{5}ma^2$$

で与えられることを示せ．

(1-2) 振り子の y 軸まわりの慣性モーメント I を求めよ．

（2）振動台が静止している（つまり $u_{\mathrm{x}}(t) = u_{\mathrm{z}}(t) = 0$）場合について考える．$t = 0$ で振り子を $\theta = \theta_0$ （θ_0は定数）の位置から静かに離したとする．

(2-1) $t = 0$ のとき，おもりにかかる重力により生じる y 軸まわりのトルクを符号を含めて答えよ．

(2-2) 剛体の運動方程式を解いて，振り子の運動 $\theta(t)$ を求めよ．

(2-3) おもりが質点であるとみなせる場合，つまり $a/\ell \to 0$ の極限では，(2-2) で求めた振り子の運動 $\theta(t)$ が

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t), \qquad \omega_0 = \sqrt{g/\ell}$$

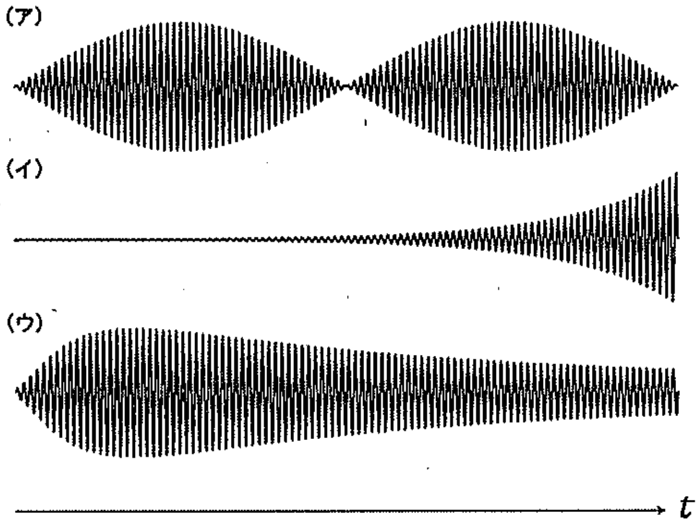
となることを示せ．

上記（2）のような実験を行った結果，振り子の振動は質点の単振動で近似できることが確認された．なお，以下ではおもりは質点であるとみなす．

（3）振動台を変位が $u_{\mathrm{x}}^{(0)}(t) = U\cos(\omega t)$，$u_{\mathrm{z}}^{(0)}(t) = 0$となるように x 方向に振動させたところ，$\theta(t) = \theta^{(0)}(t)$ となり，なおかつ $t = 0$ で $\theta = 0$ および $d\theta/dt = 0$ であることが確認できたとする．ただし，添字の ${}^{(0)}$ は基準状態であることを表し，U および ω は適当な定数で，ω と $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$ は等しくないものとする．

(3-1) $\theta^{(0)}(t)$ を求めよ.

(3-2) (3-1) の振動で, 周波数 ω と ω_0 が近いときの $\theta^{(0)}(t)$ の概形として最も適切なものを, 下の (ア) - (ウ) の中から選べ. またその理由を 2-3 行程度で述べよ. 式を使って説明してもよい.



(3-3) 振動台の x 方向の変位 $u_{\mathrm{x}}^{(0)}(t)$ は変えず, z 方向の変位に $\delta u_{\mathrm{z}}(t)$ の摂動を与えたところ, . $\theta(t) = \theta^{(0)}(t) + \delta\theta(t)$ となり, なおかつ $t = 0$ で $\theta = 0$ および $d\theta/dt = 0$ であることが確認できた. これと同じ運動を, 振動台を z 方向には振動させず, x 方向の変位に $\delta u_{\mathrm{x}}(t)$ の摂動を与え, $u_{\mathrm{x}}^{(0)}(t) + \delta u_{\mathrm{x}}(t)$ とすることにより実現したい. このとき $\delta u_{\mathrm{x}}(t)$ と $\delta u_{\mathrm{z}}(t)$ の間で満たされるべき関係式を導け. ただし, δ は微小摂動を表し, 2次以上の摂動項は無視できるものとする.

物　理　学

【第４問】

電磁波は，エネルギーとともに運動量も運ぶ．このことを利用してソーラーセイル（太陽帆，以後「帆」とよぶ）という宇宙飛翔体が考案され実験もされている．次の文を読み，以下の問いに答えよ．途中経過も含めて解答すること．ただし，帆が移動する速さは光速より十分小さく，相対論的効果は無視できるとしてよい．また，真空中での，誘電率をε_0，透磁率をμ_0，光速を$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$とする．$x$，$y$，$z$はデカルト座標（直交座標）を表し，それぞれの方向の単位ベクトルを$\hat{x}$，$\hat{y}$，$\hat{z}$とする．時刻をtと表す．

電磁場（電場$\vec{E}$，電束密度$\vec{D}$，磁束密度$\vec{B}$，磁場$\vec{H}$）が存在するとき，そこには，

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \qquad \text{(A)}$$

で与えられるエネルギーの流れ（単位時間に単位面積を通過するエネルギー．単位 W/m^2）があり，ポインティングベクトルとよばれる．また同時に，運動量の流れ（単位時間に単位面積を通過する運動量．単位 N/m^2）が存在し，それが物体にさえぎられるなどして変化すると，その物体は力を受ける．

いま，図１のように電磁場中に置かれた帆の微小面積要素$d\vec{A}$を考えると，その面には，表側から裏側に力$d\vec{f}$がはたらく．$d\vec{A}$および$d\vec{f}$の，それぞれの成分をdA_jおよびdf_i（ただし添字iやjは，x，y，zのいずれか）とする．このとき

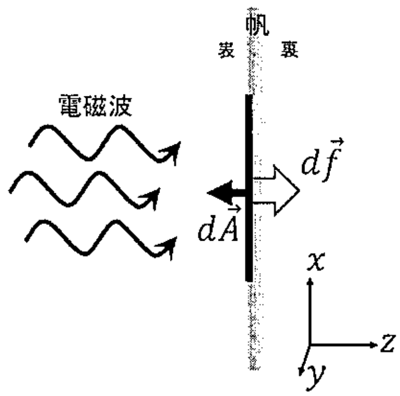


図１

$$df_i = \sum_{j=x,y,z} T_{ij} dA_j \qquad \text{(B)}$$

という関係がある．ただし，

$$T_{ij} = \varepsilon_0 [E_i E_j + c^2 B_i B_j - \tfrac{1}{2}(E^2 + c^2 B^2)\delta_{ij}] \qquad \text{(C)}$$

はマクスウェル応力テンソルのij成分，$E = |\vec{E}|$，$B = |\vec{B}|$で，δ_{ij}は単位テンソルのij成分を表す．例えば，z負側を表とするxy平面内の要素 $d\vec{A}$（$dA_z < 0$）にはたらく力のz成分は

$$df_z = T_{zz}\ dA_z \qquad \text{(D)}$$

である．

（1） 真空中を伝播する電磁波が運ぶエネルギーと運動量を求めよう．いま，波の伝播方向をz軸正方向とする．角振動数ωの正弦平面波を考え，電場が

$$\vec{E} = E_0 \sin(kz - \omega t)\ \ \hat{x} \qquad \text{(E)}$$

で記述できるとする．ただし，E_0は定数で，$k = \omega / c$である．

(1-1) この電磁波が満たす方程式を示して，磁束密度が

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \sin(kz - \omega t)\ \ \hat{y} \qquad \text{(F)}$$

となることを示せ．

(1-2) この電磁波について，式（A）を適用してポインティングベクトルのz成分S_zを求めよ．また，その 1 周期分の時間平均$\langle S_z \rangle$を求めよ．

(1-3) この電磁波について，式（C）を適用してマクスウェル応力テンソルのzz成分T_{zz}とその 1 周期分の時間平均$\langle T_{zz} \rangle$を求めよ．

(1-4) 上の（1-2）と（1-3）の結果から，この電磁波について，$\langle S_z \rangle$と$\langle T_{zz} \rangle$との間に成り立つ関係式を求めよ．

（2） いま，入射した電磁波を完全に吸収する材料でできた，面積Aの平面状の帆を考える．xy平面内に静止固定した帆面に対して垂直に，上の（1）で与えた電磁波を入射させる．この帆が受ける力のz成分の１周期分の時間平均$\langle f_z \rangle$を求めよ．帆の縁における電磁波の回折効果は無視する．

（3） 入射した電磁波を完全に吸収する材料でできた，面積が1.0×10^2 m^2，質量が1.0×10^2 kg の平面状の帆を考える．1.5 kW/m^{2}のエネルギーの流れをもつ真空中の電磁波が帆面に対して垂直に入射するとき，これに伴う力により，帆が得る加速度（単位 m/s^2）を求めよ．必要ならば，$c = 3.0 \times 10^8$ m/s, $\varepsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12}$ F/m を用いてよい．帆の縁における電磁波の回折効果は無視する．

物 理 学 ／ 化 学

【第５問】

熱平衡および相平衡に関する以下の問いに答えよ.

（１） 初期状態において異なる温度 T_1, T_2を持つ二つの物体 a, b が接触して，圧力一定かつ外界から断熱された状態で十分な時間が経ったのち，熱平衡状態となる現象を考える．ただし，それぞれの物体の定圧熱容量をC_a，C_bとし，これらは温度に依存しないものとする.

(1-1) 熱平衡状態では二つの物体の温度は等しくなる．このときの温度 T_f を求めよ.

(1-2) 物体 a，b の温度をそれぞれ初期状態の温度から準静的に温度 T_f に変化させるとき，それぞれの物体のエントロピーの変化を求めよ.

(1-3) 初期状態から温度 T_f になると，物体 a と b をあわせた系全体のエントロピーは増大することを示せ.

（２） 一定体積の断熱的な容器に閉じ込められた水が，気相（水蒸気）と液相（液体水）とに分かれて平衡状態で存在している系を考える．このときの平衡水蒸気圧を温度の関数として表す式を以下の手順で求めてみよう．ただし，圧力 p と温度 T は二つの相で共通とし，変化は準静的であるとする.

(2-1) 一般に相平衡を扱う際には，化学ポテンシャル μ を考えるのが便利である．これは，内部エネルギー U，圧力 p，体積 V，温度 T，エントロピー S から $G = U + pV - TS$ で定義されるギブスの自由エネルギー G の１モルあたりの物理量であり，物質のモル数を n として，$G = n\mu$ の関係がある．このとき，モル数の変わり得る系における G の微小変化が

$$dG = Vdp - SdT + \mu dn$$

で与えられることを用いて，この系の内部エネルギー U の微小変化を表す式を導け.

(2-2)（2-1）の結果を用いて

$$\left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)_{U,V} = -\frac{\mu}{T}$$

が成り立つことを示せ.

(2-3) 液相と気相の内部エネルギーを U_1，U_2，体積を V_1，V_2，モル数を n_1， n_2，エントロピーを S_1，S_2 とする．系全体は閉じているので

$$dU_1 + dU_2 = 0$$
$$dV_1 + dV_2 = 0$$
$$dn_1 + dn_2 = 0$$

が成り立つ．このような制約のもとで，系全体のエントロピー $S = S_1 + S_2$ が極大になる条件を考えることによって，相平衡では液相と気相の化学ポテンシャル μ_1，μ_2 が等しくなることを示せ.

(2-4) 相平衡では圧力と温度との関係が

$$\frac{dp}{dT} = \frac{s_2 - s_1}{v_2 - v_1}$$

で与えられることを示せ．ただし，s_1，s_2 は 1 モルあたりの液相，気相のエントロピー，v_1，v_2 は，それぞれ 1 モルあたりの液相，気相の体積を表す.

(2-5) 水が気相と液相の間で相平衡が成り立っている場合の平衡水蒸気圧 p は温度 T の関数として

$$p = C\exp(-L/RT)$$

の形（C は定数）で表されることを示せ．ただし，L は 1 モルあたりの水の気化熱で，温度への依存性を無視できるとし，R は気体定数とする．また，水蒸気は理想気体として扱い，(2-4) で定義された v_1, v_2 は，$v_2 \gg v_1$ とみなせるものと仮定せよ．