物　理　学

【第３問】

図 1 に示すように，一定の断面積 S を持つ管が鉛直に立っている．下に凸の部分 3 ヶ所に密度 ρ の液体を入れ，それぞれの液体部分を液柱 A，B，C とする．液柱と液柱の間にある上に凸の部分 2 か所は空気で満たされている．この部分を空気柱 D，E とする．3 つの液柱の振動の特徴を調べたい．

液体は非圧縮性であり，液体・空気いずれも粘性や摩擦は無視できる．また，空気は液体に溶けないものとし，液体は蒸発しないものとする．3 つの液柱はいずれも長さ a，体積 Sa であり，静止時には液面の高さがそろっている．空気柱 D，E の静止時の長さはいずれも h である．管の両端は大気圧P_0に開放されており，P_0は液面の高さによらず一定である．空気柱 D，E の圧力P_1，P_2は，静止時にはいずれもP_0だが液面の高さに応じて変動する．液柱 A，B，C の静止時の液面位置 O からの変位をそれぞれx_1，x_2，x_3とし，変位の符号は図 1 に示す実線矢印の方向を正とする．変位は a, h に比べて十分小さく（$a, h \gg |x_1|, |x_2|, |x_3|$），空気柱 D，E については圧力 P と体積 V の間に$PV^\gamma =$一定の関係が成り立つ．ここで比熱比 γ は定数である．また重力加速度はgである．

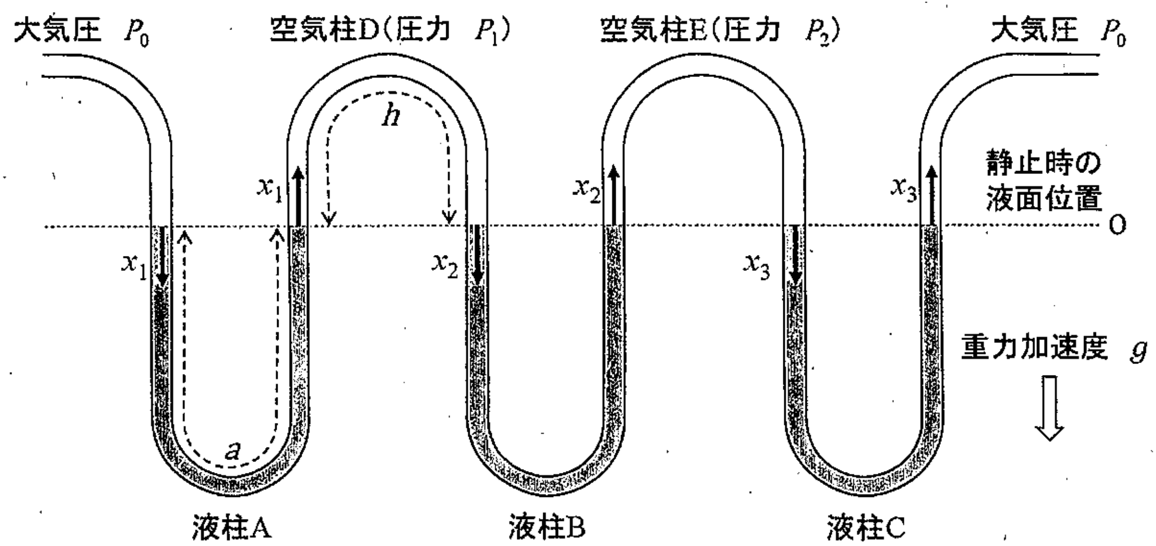

図 1

（1） それぞれの液柱に作用する力は，液柱両端の液面の高さの差から生じる液面を元の位置に戻そうとする力，および液柱両端の圧力差による力，の2つである．液柱の運動方程式を導くため，以下の問いに答えよ．

(1-1) 液柱の変位にともない液柱の両端に高さの差が生じ，この高さの差により液柱を元の位置に戻そうとする力が生じる．液柱Aに関し，この力を ρ, S, g, x_1を用いて表せ．ただし，力の符号は変位の符号と同様に図1の実線矢印の向きを正とする．

(1-2) PV^{γ}＝一定であることに注意して，空気柱D，Eの圧力P_1，P_2を γ, P_0，h, x_1，x_2，x_3のうち必要なものを用いて表せ．

(1-3) 液柱Aについて，両端の圧力差による力を γ, P_0，S, h, x_1，x_2を用いて表せ．ただし，変位が h に比べて十分小さいことを考慮して，$x_2 - x_1$に比例する形で示せ．

(1-4) 液柱Aの変位x_1に関する運動方程式を$\ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1)$としたとき，$k_1$および$k_2$を γ, P_0，a, h, ρ, gのうち必要なものを用いて表せ．ただし，$\ddot{x}_1$はx_1の2階時間微分を表す．

（2） 3つの液柱A, B, Cの連成振動に関する，以下の問いに答えよ．ただし，解答においては（1-4）のk_1およびk_2を用いよ．

(2-1) 液柱B，Cの変位x_2，x_3に関する運動方程式をそれぞれ示せ．

(2-2) 角周波数を ω, 時間を t, 変位x_1，x_2，x_3の振幅をそれぞれX_1，X_2，X_3とし，$x_1 = X_1 e^{i\omega t}$，$x_2 = X_2 e^{i\omega t}$，$x_3 = X_3 e^{i\omega t}$とおいて液柱A，B，Cの運動方程式に代入することにより，この系の基準振動（固有振動）の角周波数を求めよ．

(2-3) 各基準振動に対応する振幅X_1，X_2，X_3の関係を求めることにより，各振動の特徴をそれぞれ50字程度で説明せよ．

物　理　学

【第４問】

電磁気学の基礎方程式であるマクスウェル方程式は以下で与えられる．

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} - \boldsymbol{J}, \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

ただし t，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{J}$，ρはそれぞれ時間，電場，磁束密度，電流密度，電荷密度を表す．またε_0，μ_0はそれぞれ真空の誘電率および透磁率であり，真空中の光速cと，角周波数ω，波数kの電磁波の位相速度の比によって屈折率$n = kc/\omega$を定義する．以下では，必要であれば任意のベクトル$\boldsymbol{A}$について成り立つ公式

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A}$$

を用いてもよい．

（１） 電荷も電流も存在しない真空（すなわち$\rho = 0$，$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$）のマクスウェル方程式を用いて，真空中の電磁波について以下の問いに答えよ．

(1-1) $\boldsymbol{E}$および$\boldsymbol{B}$についての波動方程式をそれぞれ導け．

(1-2) 角周波数ω，波数kの電磁波が$x-y$平面内をx軸に対して角度θをなす方向に伝播している．このとき，

$$\phi = -\ \omega t + kx\ \cos\theta + ky\ \sin\theta$$

で定義する波の位相を用いて，$\boldsymbol{E} = \widetilde{\boldsymbol{E}}\exp(i\phi)$，$\boldsymbol{B} = \widetilde{\boldsymbol{B}}\exp(i\phi)$の形の解を仮定することにより真空中の電磁波の位相速度ω/kを求めよ．（これが光速cの定義となる．）ただし$\widetilde{\boldsymbol{E}}$，$\widetilde{\boldsymbol{B}}$は一定とする．

(1-3) 電磁波に伴う$\boldsymbol{E}$および$\boldsymbol{B}$の振動方向は電磁波の伝播方向に垂直であることを示せ．

(1-4) $|\boldsymbol{E}|/|\boldsymbol{B}|$を求めよ．

（2） 一般に物質中では電磁波の屈折率nは 1 とは異なる値をとる．屈折率は系のミクロな性質によって決定され，一般には周波数依存性を持つ．以下では，原子核およびそのまわりに捕捉された電子から構成される物質中の電磁波の伝播を考える．ここで原子核は十分質量が大きいため静止しているものと仮定し，捕捉された質量m，電荷$-e$の電子の運動を角周波数ω_0の調和振動子でモデル化する．この物質中の電磁波について以下の問いに答えよ．

(2-1) この物質中を，Y方向に直線偏光した角周波数ω，波数kの電磁波がX方向に伝播する場合を考え，電磁波の電場を以下の形におく．

$$\boldsymbol{E}(X,t) = E_0 \exp(ikX - i\omega t)\, \boldsymbol{e}_Y$$

ここで$\boldsymbol{e}_Y$はY方向の単位ベクトルを表す．

このときの電子のY方向の運動方程式を解き，Y方向の速度のうち，電磁波の振幅E_0に比例する項uを求めよ．ただし$\omega \neq \omega_0$とし，電子の位置Xが一定であることを用いてよい．また電子の運動方程式において，ローレンツ力の磁場に依存する項は無視せよ．

(2-2) この物質中に単位体積あたりN個の電子が含まれているとすると，(2-1) で求めた電磁波が誘起する電子の運動によって電流密度のY成分 $J_Y = -eNu$ が発生する．このときこの物質の屈折率が

$$n(\omega) = \frac{kc}{\omega} = \sqrt{1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

と表されることを示せ．ただし$\Omega^2 = Ne^2/(m\varepsilon_0)$と定義する．

（3） 電磁波は一般に屈折率の異なる媒質へと透過する際に屈折する．電磁波の屈折に関する以下の問いに答えよ．ただし，電磁波は$x-y$平面内を伝播する平面波であるとする．

(3-1) 図１のように屈折率n_1の物質 1（$x<0$）中を伝播する角周波数ω_1，波数k_1，伝播角θ_1の電磁波が，異なる屈折率n_2の物質 2（$x>0$）へと透過する場合を考える．このとき，電磁波が境界面（$x=0$）で屈折し，角周波数ω_2，波数k_2，伝播角θ_2の電磁波として伝播する．ただしn_1とn_2の差は十分に小さいと仮定し，境界面での反射は無視する．このとき，スネルの法則 $n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2$ が成り立つことを示せ．ここで物質1, 2 のどちらの領域においても電磁波は（1-2）で仮定した形の解で表されるものとする．なお，図１の破線は電磁波の位相ϕが一定の線を表している．

(3-2) 次に$x<0$を真空とする．この真空中から（2-2）で求めた屈折率$n(\omega)$を持つ物質中（$x>0$）に白色光を透過させたところ，屈折率が電磁波の周波数に依存するため，色によって屈折の仕方が異なっていた．このときの屈折の様子を示したものとして，正しいものを図２から選び，その理由を 100 字程度で答えよ．ただし白色光の周波数域では$\omega<\omega_0$が成り立つと仮定せよ．

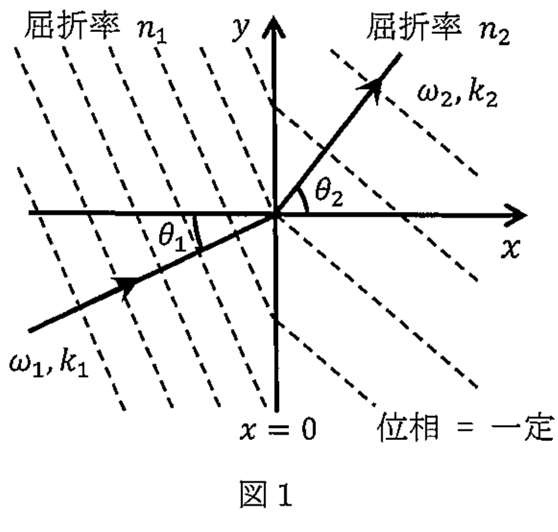

図１

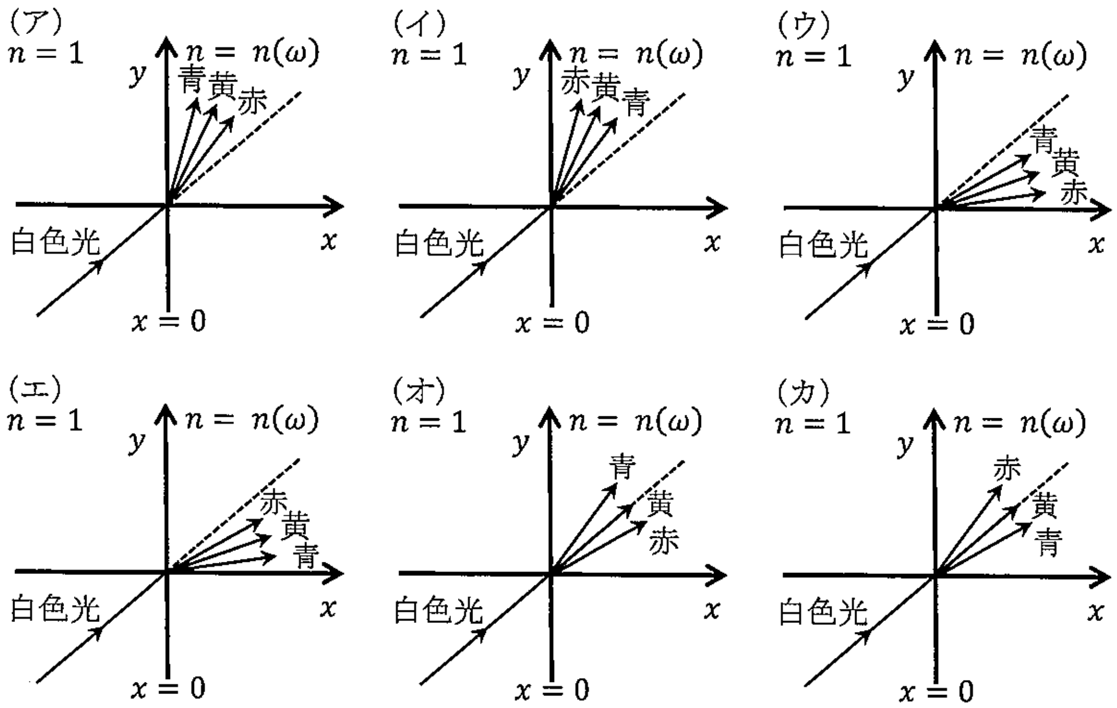
(ア)
n = 1
n = n(ω)
y
青
黄
赤
白色光
x
x = 0
(イ)
n = 1
n = n(ω)
y
赤
黄
青
白色光
x
x = 0
(ウ)
n = 1
n = n(ω)
y
青
黄
赤
白色光
x
x = 0
(エ)
n = 1
n = n(ω)
y
赤
黄
青
白色光
x
x = 0
(オ)
n = 1
n = n(ω)
y
青
黄
赤
白色光
x
x = 0
(カ)
n = 1
n = n(ω)
y
赤
黄
青
白色光
x
x = 0

図２

物 理 学 ／ 化 学

【第５問】

化学ポテンシャルと相転移に関する以下の設問に答えよ．なお，X を一定に保ったもとでの Y の Z 偏微分を $\left(\dfrac{\partial Y}{\partial Z}\right)_X$ と表す．また，X の微小変化を dX と表す．

閉じた系の準静的過程では，内部エネルギー U およびギブス自由エネルギー G の微小変化はそれぞれ

$$dU = TdS - PdV$$

$$dG = -SdT + VdP$$

と表される．ここで T は温度，S はエントロピー，P は圧力，V は体積である．系が１成分 N 相からなり，第 k 相のモル数と化学ポテンシャルをそれぞれ n_k と μ_k で表すとき，G は

$$G = \sum_{k=1}^{N} n_k \mu_k$$

で与えられ，準静的過程に対して

$$dG = -SdT + VdP + \sum_{k=1}^{N} \mu_k dn_k$$

と表される．

１モルあたりのエントロピーおよび体積を，上記に対応する小文字を用いてそれぞれ s および v と表す．

（１） T，S，P，V をそれぞれ U または G の偏微分で表せ．

（２） 次の二つの関係式が成り立つことを示せ．

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

（3） 1 成分理想気体の等温過程を考え，化学ポテンシャルの圧力依存性が

$$\mu(P,T)=\mu(P_0,T)+RT\ln\frac{P}{P_0}$$

で与えられることを，G の圧力依存性に基づいて示せ．ここで P_0 は基準となる圧力，R はモル気体定数を表す．

（4） 1 成分 1 相の系では

$$s=-\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_P,\quad v=\left(\frac{\partial\mu}{\partial P}\right)_T \qquad \text{(A)}$$

が成り立つ．これは μ が 1 モルあたりの $\boxed{\text{ア}}$ に相当するからである．この $\boxed{\text{ア}}$ に入る適切な語句を答えよ．

（5） 1 成分の気相と液相が共存する平衡系について考える．気相と液相の化学ポテンシャルをそれぞれ μ_g と μ_ℓ で表すとき，平衡の条件は $\mu_g=\mu_\ell$ で与えられる．ここで μ_g と μ_ℓ は T と P の関数である．平衡の条件は気相と液相が共存する平衡状態における T と P の関係式を与える．P が T の関数であると考えて平衡の条件の両辺を T で微分することで，その関係式

$$\frac{dP}{dT}=\frac{L}{T\Delta v}$$

を導け．ただし，式（A）は各相に独立に適用できるとする．ここで L は 1 モルあたりの転移熱であり，1 モルあたりの気相エントロピー s_g と液相エントロピー s_ℓ に対して $L=(s_g-s_\ell)T$ で与えられる．また，1 モルあたりの気相体積 v_g と液相体積 v_ℓ に対して $\Delta v=v_g-v_\ell$ である．

（6） （5）で与えられた L について，温度変化を表す式を以下の手順で導け．

(6-1) 準静的過程において，1 モルあたりの定圧熱容量 c_P は

$$c_P=T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P$$

と表される．これは系に与えられる微小熱量が 1 モルあたり $\boxed{\text{イ}}$ と表されるからである．この $\boxed{\text{イ}}$ に入る適切な式を答えよ．

(6-2) s が T と P の関数であるとして，次の関係式が成り立つことを示せ．

$$\frac{ds}{dT}=\frac{c_P}{T}-\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P\frac{dP}{dT}$$

(6-3) 以上の結果から

$$\frac{dL}{dT}=\frac{L}{T}+\Delta c_P-\frac{L}{\Delta v}\left(\frac{\partial \Delta v}{\partial T}\right)_P$$

であることを示せ．ここで 1 モルあたりの気相の定圧熱容量 c_{P_g} と液相の定圧熱容量 $c_{P\ell}$ に対して $\Delta c_P=c_{P_g}-c_{P\ell}$ である．