数　学

【第１問】

以下の問いに答えよ．途中経過も含めて解答すること．

（１）　複素数に関する以下の問いに答えよ．ただし，$i=\sqrt{-1}$ とする．

(1-1) $1+i$ の絶対値および偏角 θ を求めよ．ただし，$0 \leq \theta < 2\pi$ とする．

(1-2)　$(1+i)^n$（n は正の整数）が実数になるとき，その値を求めよ．

（２）　変数 x, y の式

$$5x^2+6xy+5y^2+8\sqrt{2}(x+y)=0$$

は変数変換することによって変数 X, Y の式

$$aX^2+bY^2=1$$

に変形できる．定数 a，b の組をひとつ求めよ．

（３）　ある製品が検査で不適合品であると判定された場合に，本当に不適合品である確率を求める．

(3-1) 検査において，不適合品が不適合品であると判定される確率 p を0.9，適合品が不適合品と判定される確率 q を 0.1，製品の総数 x を100万個，そのうち不適合品の総数 y を1万個とする．全ての製品を検査したときに不適合品と判定される個数の期待値と，ある製品を検査したときに不適合品と判定される確率を p，q，x，y で表すとともに，それらの数値を求めよ．

(3-2)　(3-1) の場合に，検査で不適合品と判定された製品が本当に不適合品である確率を p，q，x，y で表すとともに，その数値を求めよ．

（4） 周期2πの周期関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 \qquad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

で定義されている．以下の問いに答えよ．

(4-1) 関数 $f(x)$ をフーリエ級数に展開せよ．

(4-2) （4-1）の結果を用いて，以下を示せ．

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

数　学

【第２問】

実変数 x, t のいずれかまたは両方を独立変数とする実関数 $p(t)$, $q(x,t)$ に関する積分

$$L\{p(t)\} = \int_0^\infty p(t)e^{-st}dt,\quad L\{q(x,t)\} = \int_0^\infty q(x,t)e^{-st}dt$$

が存在するとき，$L\{p(t)\}$, $L\{q(x,t)\}$ をそれぞれ $p(t)$, $q(x,t)$ のラプラス変換という．

いま実関数 $w(x,t)$ に関する偏微分方程式（c は実定数）

$$\frac{\partial}{\partial t}w(x,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}w(x,t) \quad (0 < x < \infty, 0 < t < \infty) \qquad \text{(a)}$$

初期条件 $w(x,0) = 0 \quad (0 \leq x < \infty)$

境界条件 $w(0,t) = h(t) \quad (0 < t < \infty)$

をラプラス変換を用いて解くことを考える．以下の問いに答えよ．途中経過も含めて解答すること．

（１） (a) 式を t についてラプラス変換することにより，$W(x,s) = L\{w(x,t)\}$ に関する常微分方程式を導出し，その解を x と s の関数として表せ．ただし，$x \to \infty$ のとき $W(x,s)$ は有界とし，$L\{h(t)\} = H(s)$ とする．また，s は正の実数とする．

（２） 実関数 $f(t)$, $g(t)$ について，$f(t) * g(t)$ を次のように定義する．

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (0 < t < \infty)$$

$f(t)$, $g(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $F(s)$, $G(s)$ とするとき，次の関係式

が成り立つことを示せ．

$$L\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$$

ただし，$t < 0$ のとき $f(t) = g(t) = 0$ とし，変数変換 $u = t - \tau$ を用いてもよい．

（3）（1）で求めた $W(x,s)$ をラプラス逆変換し，定積分を用いて $w(x,t)$ を x と t の関数として表せ．ただし，ラプラス逆変換の公式

$$L^{-1}\left(e^{-k\sqrt{s}}\right) = \frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{k^2}{4t}}$$

を用いてもよい．ここで，k は実数である．

（4）$h(t) = h_0$（h_0 は実定数）のとき，次式で定義される関数 $\zeta(x)$ を用いて，$w(x,t)$ を表せ．

$$\zeta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta$$