数　学

【第１問】

以下の問いに答えよ．途中経過も含めて解答すること．

（１）　以下の定積分を求めよ．ただし，xは実変数，aは正の実定数である．

(1-1)

$$\int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$$

変数ϕを用いて$x = a\sin\phi$と置いた変換をしてもよい．

(1-2)

$$\int_0^a \sqrt{\frac{a-x}{x}}\, dx$$

（２）　3次元ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ に対して，直交直線座標系(x_1, x_2, x_3)で定義されたラプラシアンΔを作用させる微分演算$\Delta\boldsymbol{u} = (\partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2)\boldsymbol{u}$を，次に定義する微分記号rot，grad，divを用いる表現に変形せよ．

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = (\partial v_3/\partial x_2 - \partial v_2/\partial x_3, \partial v_1/\partial x_3 - \partial v_3/\partial x_1, \partial v_2/\partial x_1 - \partial v_1/\partial x_2)$$
$$\mathrm{grad}\,\phi = (\partial\phi/\partial x_1, \partial\phi/\partial x_2, \partial\phi/\partial x_3)$$
$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = \partial v_1/\partial x_1 + \partial v_2/\partial x_2 + \partial v_3/\partial x_3$$

ここで，ϕと$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$はそれぞれ任意のスカラー場とベクトル場である．

（３）　複素数$z = x + iy$（x，yは実数）を独立変数とする複素関数$w = f(z)$による写像を考える．ここで，i は虚数単位である．

(3-1) 複素z平面上の円$|z - i| = 1$（ただし$z = 0$を除く）は，複素関数$f(z) = 1/z$によって，複素w平面上のどのような図形に写像されるか図示せよ．

(3-2) 複素z平面上の領域$|z| \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$は，複素関数$f(z) = \sqrt{2}(1-i)z$によって，複素$w$平面上のどのような領域に写像されるか図示せよ．

（４）確率変数Xの確率密度関数が実数の定数μ，$\sigma > 0$を用いて

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (-\infty < x < \infty)$$

で与えられるとき，Xの期待値がμ，分散がσ^2であることを示せ．ガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0)$$

を用いてもよい．

（５） フーリエ変換は次のように定義される．

$$\tilde{u}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-ikx} dx$$

ここで，$u(x)$は区分的に滑らかで絶対可積分な関数である．関数$u(x)$が次の微分方程式を満たすとき，$u(x)$のフーリエ変換$\tilde{u}(k)$の具体的な形を求めよ．

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = c\,\delta(x)$$

ただし，cは正の実定数，$\delta(x)$はデルタ関数であり，関数$u(x)$は$|x| \to \infty$において$u \to 0$かつ$du/dx \to 0$とする．ここで，任意の関数$f(x)$と実定数bに対する$\delta(x)$の性質

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-b)\,dx = f(b)$$

を用いてもよい．

数　学

【第２問】

定数を成分とする任意のn次正方行列をAで表すとき，行列の指数関数は次のように定義される．

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \qquad \text{(a)}$$

ここで，A^kはAのk乗を表し，A^0は単位行列とする．よって，AとしてtA（tは実変数）をとれば，

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \qquad \text{(b)}$$

である．このとき，以下の問いに答えよ．途中経過も含めて解答すること．

（１）　行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値をすべて求めよ．また，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを正規化して示せ．

（２）　（１）の行列Aを対角化せよ．

（３）　式 (b) をtで微分し，de^{tA}/dtを求めよ．

（４）　Pをn次正則行列とし，Pの逆行列をP^{-1}で表す．

(4-1) $e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}$が成り立つことを示せ．

(4-2)（１）の行列Aについて，e^{tA}を求めよ．ただし，$D = P^{-1}AP$とおくと，$e^{tA} = e^{tPDP^{-1}} = Pe^{tD}P^{-1}$が成り立つ．

（５）　tを独立変数とする微分可能な実関数fとgに関する，次の連立微分方程式を解け．

$$f'(t) = 4f(t) - 2g(t)$$
$$g'(t) = f(t) + g(t)$$

ここで，$f'(t)$，$g'(t)$はそれぞれdf/dt，dg/dtを表す．また，

$$f(0) = 1$$
$$g(0) = 2$$

とする．