数　学

【第１問】

以下の問いに答えよ．途中経過も含めて解答すること．

（１）　2 次元極座標を用いて $r = 1 + \cos\theta$ で表される閉曲線を考える．ここで，実数 r，$\theta\,(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ はそれぞれ動径と偏角である．

(1-1) この閉曲線の周の長さを求めよ．

(1-2) この閉曲線の囲む領域の面積を求めよ．

（２）　微分方程式 $(3x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} = 4xy$ の一般解を $f(x,y) = 0$ の形で求めよ．ただし，x の関数 u を用いて，$y = xu$ と置換して解け．

（３）　実数 $x > 0$ に対してガンマ関数は

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

と定義される．

(3-1) $\Gamma(1)$ を求めよ．

(3-2) 以下を証明せよ．ただし，aは正の実数とする．

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

(3-3) 次の積分を計算せよ．ただし，n は正の整数とする．

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

(3-4) 半径 1 の n 次元球（$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = 1$）の表面積を S_n と

する．n 次元極座標において動径 r と $r+dr$ に挟まれた領域の体積要素は $S_n r^{n-1} dr$ である．S_n をガンマ関数を用いて表せ.

（4） 箱の中に赤い球と白い球が 4 個ずつ入っている．この箱の中から，無作為に球を 1 個取り出し，赤い球が出た場合は箱の中に戻し，白い球が出た場合は箱の中に戻さない. この作業を 4 回繰り返すとき，白い球が 3 回以上出る確率を求めよ.

数　学

【第２問】

3 行 2 列の実行列 A を $U\Lambda V^T$ と分解することを考える．ここで，U は 3 行 3 列の実直交行列，V は 2 行 2 列の実直交行列であり，V^T は行列 V の転置行列を表す．また，Λ は 3 行 2 列の行列であり，実数 λ_1，$\lambda_2\ (\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0)$ を用いて

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と書ける．以下の問いに答えよ．途中経過も含めて解答すること．

（1）　次の 3 行 2 列の実行列 A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

に対して，以下の問いに答えよ．

(1-1) AA^T の固有値 $(\omega_1 > \omega_2 > \omega_3)$ と対応する固有ベクトル $(\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3)$ を計算せよ．また，固有ベクトルが互いに直交することを示せ．ただし，固有ベクトルは正規化して示すこと．

(1-2)（1-1）で求めた固有値 $\omega_i\ (i = 1,\ 2,\ 3)$ および固有ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ の組のうち，0 より大きい固有値に対応する固有ベクトルを用いて，ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ を $\boldsymbol{v}_i = \frac{1}{\sqrt{\omega_i}} A^T \boldsymbol{u}_i$ と定義する．$\boldsymbol{v}_i$ は互いに直交し，それぞれの大きさが 1 であることを示せ．

(1-3) 与えられた A に対し，U，Λ，V^T をそれぞれ求めよ．

（２） 一般の３行２列の実行列 A は,（１）と同様の手続きに従い, $U\Lambda V^T$ と分解でき, U, Λ, V^T は実行列となることが知られている. ここでは, 簡単のため AA^T が 3 つの異なる固有値を持つ場合について考える. まず U, Λ, V^T がそれぞれ実行列になるためには AA^T の固有値は全て非負となる必要がある. また, AA^T の固有値のうち１つは 0 となる必要がある. 実際に, AA^T の固有値は全て非負であり, 最小値が 0 であることを示せ.